

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
 $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f .

δ) $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

Μονάδες 5

B2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

Μονάδες 6

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

Μονάδες 6

B4. Έστω η συνάρτηση $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$ (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

Γ2. Έστω $(\varepsilon): y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ με $-2 < \alpha < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = +1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 9

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot \sin^3 x + f'(x) \cdot \sin^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x - \epsilon\phi x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ